



CEU

*Universidad
San Pablo*

Tema 3: Álgebra matricial

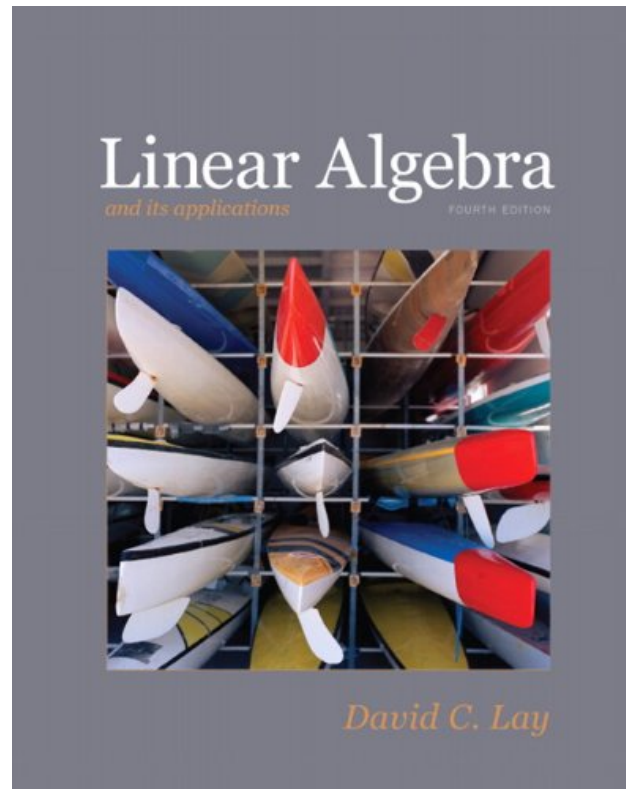
Curso 2016/2017

Ruzica Jevtic
Universidad San Pablo CEU
Madrid

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Referencias



Lay D. *Linear algebra and its applications* (4th ed).
Chapter 2.

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Operaciones matriciales

Definición: Matriz

Informalmente, se puede definir una matriz como un arreglo regular de números dispuestos en una cuadrícula de **m filas** y **n columnas**. Más formalmente, decimos que $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$.

Denotamos como $\mathbf{a}_j$ a la **columna** que ocupa la **posición j** , y $\mathbf{a}_{ij}$ al **elemento** que ocupa la **fila i** y la **columna j** .

$$A = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Octave: $A = [1 \ 2 \ 3; 4 \ 5 \ 6]$

$$\begin{matrix} & & \text{Column } j & & \\ & & j & & \\ \begin{matrix} \text{Row } i \\ i \end{matrix} & \left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right] & = & A \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_j & \mathbf{a}_n & \end{matrix}$$

Operaciones matriciales

Definición: Matriz

La **diagonal principal** es el vector compuesto por los elementos a_{ij} , tales que $i = j$ ($a_{11}, a_{22}, \dots$).

Existen dos matrices especiales, que son:

- **Matriz identidad:** denotada como $I \in \mathcal{M}_{n \times n}$, que tiene todos ceros menos la diagonal principal, cuyos valores son todos 1
- **Matriz cero:** denotada como $0 \in \mathcal{M}_{m \times n}$, cuyos elementos son todos 0

$$I_1 = (1), \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones matriciales

Definición: Suma con un escalar

El **operador suma** entre un **escalar** y una **matriz** se define como:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m \times n} &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n} \\ +(k, A) &\rightarrow B = k + A \quad | \quad b_{ij} = k + a_{ij} \end{aligned}$$

Sobrecargando la notación, el **operador suma** entre una **matriz** y un **escalar** se define como:

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{m \times n} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n} \\ +(A, k) &\rightarrow B = A + k \quad | \quad b_{ij} = a_{ij} + k \end{aligned}$$

Propiedades

$$\begin{aligned} k + A &= A + k \\ (k_1 + k_2) + A &= k_1 + (k_2 + A) \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ B = 1 + A &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Octave: $B = 1 + A$

Operaciones matriciales

Definición: Multiplicación por un escalar

El **operador multiplicación** entre un **escalar** y una **matriz** se define como:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m \times n} &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n} \\ \cdot (k, A) &\rightarrow B = kA \quad | \quad b_{ij} = k a_{ij} \end{aligned}$$

Sobrecargando la notación, el **operador multiplicación** entre una **matriz** y un **escalar** se define como:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{M}_{m \times n} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n} \\ \cdot (A, k) &\rightarrow B = Ak \quad | \quad b_{ij} = a_{ij} k \end{aligned}$$

Propiedades

$$\begin{aligned} kA &= Ak \\ (k_1 k_2) A &= k_1 (k_2 A) \\ (k_1 + k_2) A &= k_1 A + k_2 A \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ B = 2A &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Octave: $B = 2 * A$

Operaciones matriciales

Definición: Suma de dos matrices

El **operador suma** entre **dos matrices** se define como:

$$\begin{aligned} + : \mathcal{M}_{m \times n} \times \mathcal{M}_{m \times n} &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times n} \\ +(A, B) &\rightarrow C = A + B \quad | \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \end{aligned}$$

Propiedades

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A + 0 &= A \\ k(A + B) &= kA + kB \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ C = A + B &= \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Octave: $C = A + B$

Operaciones matriciales

Demostración de las propiedades

No vamos a demostrar todas las propiedades, aunque todas ellas seguirían la misma estrategia mostrada a continuación. Por ejemplo:

$$k(A + B) = kA + kB$$

Demostración:

Desarrollamos la parte izquierda de la igualdad:

$$\begin{aligned} C &= A + B & | & c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ D &= kC = k(A + B) & | & d_{ij} = kc_{ij} = k(a_{ij} + b_{ij}) = ka_{ij} + kb_{ij} \end{aligned}$$

Ahora, por el lado derecho de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} E &= kA & | & e_{ij} = ka_{ij} \\ F &= kB & | & f_{ij} = kb_{ij} \\ G &= E + F = kA + kB & | & g_{ij} = e_{ij} + f_{ij} = ka_{ij} + kb_{ij} \end{aligned}$$

Es obvio que $d_{ij} = g_{ij}$, y por lo tanto $k(A + B) = kA + kB$

Operaciones matriciales

Definición: Multiplicación de dos matrices

El **operador multiplicación** entre **dos matrices** se define como:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{M}_{m \times n} \times \mathcal{M}_{n \times p} &\rightarrow \mathcal{M}_{m \times p} \\ \cdot (A, B) &\rightarrow C = AB \quad | \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

Si consideramos las diferentes columnas de B , tenemos:

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_p) \Rightarrow AB = (A\mathbf{b}_1 \ A\mathbf{b}_2 \ \dots \ A\mathbf{b}_p)$$

Esto puede ser interpretado como que “la **j -ésima columna de AB** es la **suma ponderada o combinación lineal** de las **columnas de** la matriz A , usando los **pesos** definidos por **la j -ésima columna de B** ”

Ejemplo

Octave: $A * B$

Operaciones matriciales

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces:

Operaciones matriciales

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\begin{aligned} A\mathbf{b}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, & A\mathbf{b}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, & A\mathbf{b}_3 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 21 \\ -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$AB = A[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 21 \\ -1 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $A\mathbf{b}_1 \quad A\mathbf{b}_2 \quad A\mathbf{b}_3$

De esta forma, para calcular directamente una entrada específica de AB , por ejemplo $(AB)_{23}$, tenemos que multiplicar la **2ª fila de A** y la **3ª columna de B**

$$(AB)_{23} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \right] = 1 \cdot 6 + (-5) \cdot 3 = -9$$

Operaciones matriciales

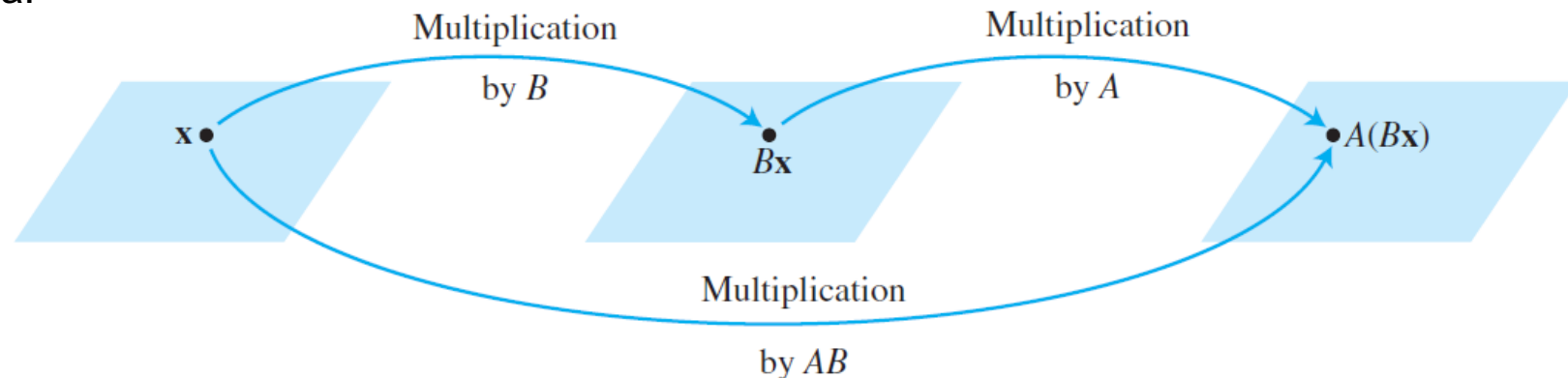
Interpretación Geométrica

Consideremos las transformaciones lineales:

$$T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

$$T_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$$

que mapean cualquier **vector $\mathbf{x}$** usando la **matriz A o B** respectivamente. Ahora, consideremos la **aplicación secuencial** de primero T_B , y después de T_A , tal y como se muestra en la siguiente figura:



La multiplicación de matrices nos ayuda a definir una sola transformación de tal forma que podemos transformar los vectores originales en un solo paso:

$$T_{AB}(\mathbf{x}) = (AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = T_A(T_B(\mathbf{x}))$$

Operaciones matriciales

Propiedad

$$\text{row}_i(AB) = \text{row}_i(A)B$$

Ejemplo (...continuación)

multiplicación de matrices:

– fila * columna

$$\text{row}_1(AB) = \text{row}_1(A)B = (2 \quad 3) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (11 \quad 0 \quad 21)$$

Más propiedades

$$A(BC) = (AB)C$$

Asociatividad

$$A(B + C) = AB + AC$$

Distributividad por la izquierda

$$(A + B)C = AC + BC$$

Distributividad por la derecha

$$r(AB) = (rA)B = A(rB)$$

Para cualquier escalar r

$$I_m A = A = A I_n$$

Para $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$

Operaciones matriciales

Más propiedades (...continuación)

Demostración $A(BC) = (AB)C$

Consideremos la descomposición en columnas de la matriz C.

$$\begin{aligned}C &= (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \dots \quad \mathbf{c}_p) \Rightarrow \\BC &= (B\mathbf{c}_1 \quad B\mathbf{c}_2 \quad \dots \quad B\mathbf{c}_p) \Rightarrow \\A(BC) &= (A(B\mathbf{c}_1) \quad A(B\mathbf{c}_2) \quad \dots \quad A(B\mathbf{c}_p))\end{aligned}$$

Pero según hemos visto en la interpretación geométrica de la multiplicación de matrices que $A(B\mathbf{c}_i) = (AB)\mathbf{c}_i$, por lo tanto,

$$A(BC) = ((AB)\mathbf{c}_1 \quad (AB)\mathbf{c}_2 \quad \dots \quad (AB)\mathbf{c}_p) = (AB)C$$

Consideraciones importantes

$AB \neq BA$, la multiplicación de matrices NO es conmutativa

$AB = AC \not\Rightarrow B = C$

$AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ ó } B = 0$

Operaciones matriciales

Definición: Potencia de una matriz

Si tenemos $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, entonces dicha matriz **elevada a k** está definida como:

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ veces}}$$

Nota: $A^0 = I_n$

Ejemplo

Octave: $A \wedge k$

Operaciones matriciales

Definición: Traspuesta de una matriz

Si tenemos $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, entonces la **traspuesta de A (A^T)** es una matriz de $\mathcal{M}_{n \times m}$, de tal forma que las **filas de A** son las **columnas de A^T** , o más formalmente

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Propiedades

$$\begin{aligned}(A^T)^T &= A \\ (A + B)^T &= A^T + B^T \\ (rA)^T &= rA^T \\ (AB)^T &= B^T A^T\end{aligned}$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Octave: A'

Operaciones matriciales

Propiedades (...continuación)

Demostración $(AB)^T = B^T A^T$

Consideremos $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$. Por la definición de multiplicación de matrices sabemos que:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

Sea $A' = A^T$ y $B' = B^T$. Por la misma razón:

$$(B^T A^T)_{ij} = (B' A')_{ij} = \sum_{k=1}^n b'_{ik} a'_{kj}$$

Pero $b'_{ik} = b_{ki}$ y $a'_{kj} = a_{jk}$, por lo que:

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = (AB)_{ji}$$

O lo que es lo mismo:

$$B^T A^T = (AB)^T$$

- Tema 3_Enunciados de ejercicios I
 - Ejercicio 2.1.3
 - Ejercicio 2.1.10
 - Ejercicio 2.1.12
 - Ejercicio 2.1.18
 - Ejercicio 2.1.19
 - Ejercicio 2.1.20
 - Ejercicio 2.1.22
 - Ejercicio 2.1.39 (** Octave **)
 - Ejercicio 2.1.40 (** Octave **)

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Inversa de una matriz

Ejemplo

El inverso de un número es un concepto claro: $5 \cdot \frac{1}{5} = 5 \cdot 5^{-1} = 5^{-1} \cdot 5 = 1$

Definición: Inversa de una matriz

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es **invertible** (o **no-singular**) si existe otra matriz $C \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que

$$AC = I_n = CA$$

A la **matriz** C se le denomina **inversa de A** , y se denota como A^{-1} . Si A es **no invertible**, se dice que A es una **matriz singular**.

Ejemplo

Octave: $\text{inv}(A)$

Inversa de una matriz

Ejemplo

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ y $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Se puede comprobar fácilmente que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades

La **inversa** de una matriz es **única**.

Demostración

Asumimos que existen dos inversas diferentes C_1 y C_2 . Entonces:

$$C_2 = C_2I = C_2(AC_1) = (C_2A)C_1 = IC_1 = C_1$$

lo cual es una contradicción, y por lo tanto, la inversa tiene que ser única.

Inversa de una matriz

Teorema: Inversa de una matriz de 2 x 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, entonces A es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inversa de una matriz

Teorema: Inversa de una matriz de 2 x 2

Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Si $ad - bc \neq 0$, entonces A es invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Demostración

Es fácil de verificar que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

Inversa de una matriz

Teorema

Si $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es invertible, entonces para todos los $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución que es $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$

Demostración

➤ Demostración $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es una solución

Si sustituimos la solución en la ecuación tenemos: $A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = \mathbf{b}$

➤ Demostración $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es la única solución

Asumimos que $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$ es también una solución, entonces $A\mathbf{x}' = \mathbf{b}$

Si multiplicamos por la izquierda por A^{-1} , tenemos:

$$A^{-1}A\mathbf{x}' = A^{-1}\mathbf{b} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x}$$

lo cual es una contradicción y, por lo tanto, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ debe ser la única solución

Inversa de una matriz

Teorema

- 1) Si A es invertible, entonces A^{-1} también es invertible, y su inversa es $A \rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$
- 2) Si A y B son invertibles, entonces AB también es invertible, y su inversa es $B^{-1}A^{-1} \rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- 3) Si A es invertible, entonces A^T también es invertible, y su inversa es $(A^{-1})^T \rightarrow (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Demostración 1)

La definición de A^{-1} dice que es la matriz tal que: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

La inversa de A^{-1} debe ser una matriz C tal que: $CA^{-1} = A^{-1}C = I$

Si comparamos estas dos ecuaciones, podemos ver que $C = A$ es la inversa de A^{-1}

Demostración 2)

Comprobemos que $B^{-1}A^{-1}$ es realmente la inversa de AB :

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I\end{aligned}$$

Inversa de una matriz

Teorema (...continuación)

Demostración 3)

Comprobemos que $(A^{-1})^T$ es realmente la inversa de A^T :

$$\begin{aligned} A^T (A^{-1})^T &= [(AB)^T = B^T A^T] = (A^{-1}A)^T = I^T = I \\ (A^{-1})^T A^T &= [(AB)^T = B^T A^T] = (AA^{-1})^T = I^T = I \end{aligned}$$

Teorema (generalización del teorema anterior)

El producto de **matrices $n \times n$ invertibles** es **invertible**, y la inversa es el **producto de sus inversas en orden inverso**

$$(A_1 A_2 \dots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Inversa de una matriz

Teorema (...continuación)

Demostración

Lo demostraremos por *inducción débil*. Sabemos que el teorema es cierto para $p = 2$ (por los teoremas previos). Asumimos que es cierto también para $p - 1$, es decir:

$$(A_1 A_2 \dots A_{p-1})^{-1} = A_{p-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Queremos saber si es cierto para p . Para ello, definimos $B = A_1 A_2 \dots A_{p-1}$. Entonces, podemos reescribir el teorema como:

$$(A_1 A_2 \dots A_p)^{-1} = (B A_p)^{-1}$$

Esta es la inversa de la multiplicación de dos matrices. Sabemos por los teoremas anteriores que $(B A_p)^{-1} = A_p^{-1} B^{-1}$. Pero supusimos que:

$$B^{-1} = (A_1 A_2 \dots A_{p-1})^{-1} = A_{p-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Y por lo tanto,

$$(B A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \dots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- **Matrices elementales**
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Matrices elementales

Las **operaciones elementales** que podemos efectuar sobre las filas de una matriz son:

- 1) **Multiplicación** por un escalar
- 2) **Intercambio** de dos filas
- 3) **Reemplazar** una fila con una combinación lineal de dos o más filas

Todas estas operaciones pueden ser representadas como multiplicación de matrices

Ejemplo

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

- 1) Podemos multiplicar la tercera fila por un escalar r , multiplicando por la izquierda por la matriz:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix} \Rightarrow E_1 A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ rg & rh & ri \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Ejemplo (...continuación)

- 2) Podemos **intercambiar** la **primera** y la **segunda fila** de la matriz, multiplicando por la izquierda por la matriz

$$E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_2 A = \begin{pmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

- 3) Podemos **sustituir** la tercera fila por **$r_3 + k_1 r_1$** , multiplicando por la izquierda por la matriz:

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow E_3 A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g + k_1 a & h + k_1 b & i + k_1 c \end{pmatrix}$$

Definición: Matriz elemental

Una **matriz elemental** es aquella que difiere de la **matriz identidad** en tan sólo una simple operación elemental por filas

Matrices elementales

Teorema

La **inversa de una matriz elemental** es otra matriz elemental del mismo tipo. Esto es, con la que las operaciones por filas se pueden deshacer

Ejemplo (...continuación)

$$1) E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

$$2) E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3) E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Teorema

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es invertible, si y sólo si, es equivalente por filas a I_n . En este caso, la secuencia de operaciones que transforma A en I_n son las mismas que transforman I_n en A^{-1}

Demostración (hacia adelante)

Si A es invertible, entonces sabemos que el sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene una única solución para cualquier b . Si tiene una solución para todo b , entonces debe tener un pivote en cada fila, que debe estar en la diagonal y, por lo tanto, la matriz escalonada reducida de A tiene que ser I_n

Demostración (hacia atrás)

Si A es equivalente por filas a I_n , entonces existe una secuencia de matrices elementales que transforma A en I_n .

$$A \sim E_1 A \sim E_2 E_1 A \sim \dots \sim E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1 A = I_n$$

$E = E_n E_{n-1} \dots E_2 E_1$ es un candidato a ser la inversa de A . Dado que cada matriz elemental es invertible, y el producto de matrices invertibles es invertible, entonces E es invertible y A tiene que ser su (única) inversa. Por lo tanto, E es la inversa de A y A es invertible

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- **Un algoritmo para invertir matrices**
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Un algoritmo para invertir matrices

Algoritmo

Algoritmo: reducir la **matriz aumentada** $(A \mid I)$.

- Si **A es invertible**, entonces $(A \mid I) \sim (I \mid A^{-1})$
- Si **A no es invertible**, entonces no podremos reducir **A en I**

Este algoritmo es muy usado en la práctica porque es numéricamente estable y bastante eficiente.

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$. Calcular su inversa.

Construimos la matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Un algoritmo para invertir matrices

Ejemplo (...continuación)

Transformamos la matriz aplicando operaciones de reducción por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 - 4\mathbf{r}_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{r}_3 \leftarrow \mathbf{r}_3 + 3\mathbf{r}_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{r}_3 \leftarrow \frac{1}{2}\mathbf{r}_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Un algoritmo para invertir matrices

Ejemplo (...continuación)

$$\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 + 3\mathbf{r}_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Dado que A es equivalente por filas a I_3 , entonces A es invertible y su inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} & 7 & -\frac{3}{2} \\ -2 & 4 & -1 \\ \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \text{ Para finalizar el ejercicio, deberíamos comprobar que } AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$$

Un algoritmo para invertir matrices

Una nueva interpretación de la inversión de matrices

Construyendo la **matriz aumentada** $(A \mid I)$, estamos resolviendo simultáneamente múltiples sistemas de ecuaciones

$$Ax = e_1 \quad Ax = e_2 \quad Ax = e_3 \quad \dots$$

Computacionalmente, esta interpretación es importante porque si queremos calcular **la i -ésima columna de A^{-1}** , es suficiente con resolver el sistema de ecuaciones

$$Ax = e_1$$

Ejemplo (...continuación)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 8 & 0 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 1 \end{array} \right)$$

- Tema 3_Enunciados de ejercicios II
 - Ejercicio 2.2.1
 - Ejercicio 2.2.5
 - Ejercicio 2.2.7
 - Ejercicio 2.2.11
 - Ejercicio 2.2.19
 - Ejercicio 2.2.25
 - Ejercicio 2.2.36 (** Octave **)

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- **Caracterización de las matrices invertibles**
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Caracterización de las matrices invertibles

Teorema de la Matriz Invertible

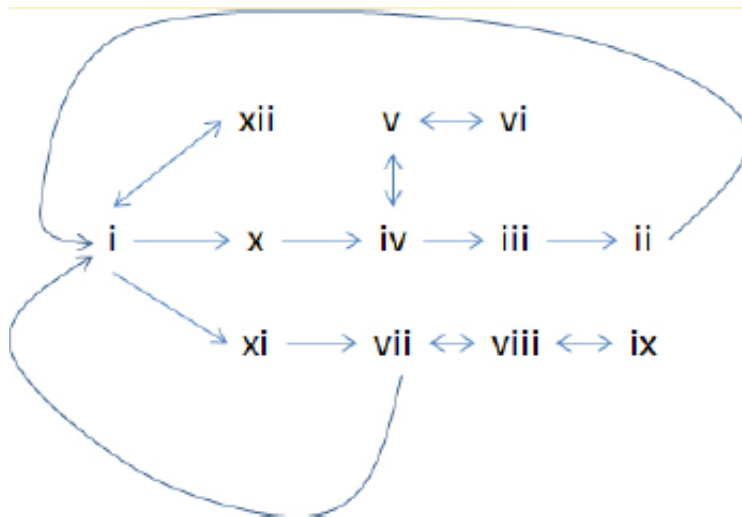
Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes (o todas son ciertas o todas falsas):

- i. A es invertible
- ii. A es equivalente por filas a I_n
- iii. A tiene n posiciones pivote
- iv. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- v. Las columnas de A son linealmente independientes
- vi. La transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ es inyectiva
- vii. La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
- viii. Las columnas de A generan todo $\mathbb{R}^n$
- ix. La transformación $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ mapea $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$
- x. Existe una matriz $C \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que $CA = I_n$
- xi. Existe una matriz $D \in \mathcal{M}_{n \times n}$ tal que $AD = I_n$
- xii. A^T es una matriz invertible

Caracterización de las matrices invertibles

Teorema de la Matriz Invertible (...continuación)

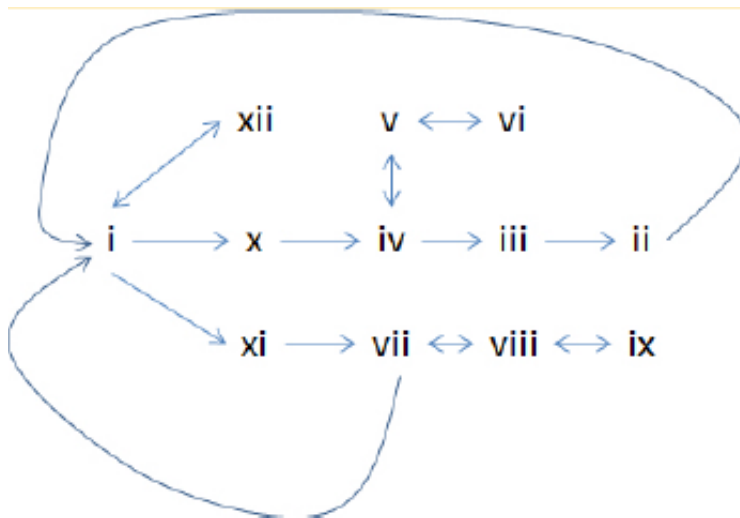
Para probar el teorema, seguiremos el esquema de razonamiento siguiente:



- Demostración $i \Rightarrow x$
Si i es cierto, entonces x es cierto simplemente haciendo $C = A^{-1}$
 - Demostración $x \Rightarrow iv$
Ver ejercicio 2.1.23
 - Demostración $iv \Rightarrow iii$
Ver ejercicio 2.2.23
 - Demostración $iii \Rightarrow ii$
Si iii es cierto, entonces los n pivotes tienen que estar en la diagonal principal, y en ese caso, la matriz escalonada reducida tiene que ser I_n
- Demostración $ii \Rightarrow i$
Si ii es cierto, entonces i es cierto gracias al teorema de la pag. 32
 - Demostración $i \Rightarrow xi$
Si i es cierto, entonces xi es cierto simplemente haciendo $C = A^{-1}$

Caracterización de las matrices invertibles

Teorema de la Matriz Invertible (...continuación)



- Demostración $xi \Rightarrow vii$
Ver ejercicio 2.1.24
- Demostración $vii \Rightarrow i$
Ver ejercicio 2.2.24
- Demostración $vii \Leftrightarrow viii \Leftrightarrow ix$
Ver teoremas tema 2
- Demostración $iv \Leftrightarrow v \Leftrightarrow vi$
Ver teoremas tema 2
- Demostración $i \Rightarrow xii$
Ver teorema pág. 25
- Demostración $i \Leftarrow xii$
Ver teoremas pág. 25 intercambiando los roles de A y A^T

El verdadero potencial de este teorema es que conecta los **sistemas de ecuaciones** con los conceptos de **invertibilidad**, **independencia lineal** y **bases de un subespacio**

Caracterización de las matrices invertibles

Corolario

1. Si A es invertible, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para todo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$
2. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ y $AB = I_n$, entonces A y B son invertibles y $B = A^{-1}$ y $A = B^{-1}$

Nota: ¡¡Este corolario sólo se aplica a matrices cuadradas!!

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- **Transformaciones lineales invertibles**
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Transformaciones lineales invertibles

Consideremos la **transformación lineal**:
$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\rightarrow A\mathbf{x} \end{aligned}$$

Definición: Transformación inversa

T es **invertible**, si y sólo si, existe $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$S(T(\mathbf{x})) = \mathbf{x} = T(S(\mathbf{x}))$$

Ejemplo

$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ es **invertible** y su **inversa** es $S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Demostración

$$S(T(\mathbf{x})) = S\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

$$T(S(\mathbf{x})) = T\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Transformaciones lineales invertibles

Ejemplo

$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ NO es invertible porque $T((1, 0)) = T((1, 1)) = (1, 0)$, por lo que dada la “salida” $(1, 0)$, no podemos recuperar el vector de entrada que originó dicha salida

Teorema

Si T es **invertible**, entonces es una función **sobreyectiva**

Demostración

Consideremos cualquier vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, siempre podemos aplicar la **transformación S** para obtener un nuevo vector $\mathbf{x} = S(\mathbf{b})$. Entonces, recuperamos $\mathbf{b}$ haciendo uso del hecho de que T es la inversa de S , es decir, $\mathbf{b} = T(\mathbf{x})$. En otras palabras, cualquier vector $\mathbf{b}$ está en el **rango de T** y, por lo tanto, **T es sobreyectiva**

Transformaciones lineales invertibles

Teorema

T es **invertible**, si y sólo si, A es **invertible**. Si T es **invertible**, entonces la única función que satisface la definición previa es:

$$S(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$$

Demostración (hacia delante)

Si T es **invertible**, entonces es **sobreyectiva** (ver Teorema previo). Entonces, A es **invertible** por el **Teorema de la Matriz Invertible** (pág. 42, apartados **i** y **ix**)

Demostración (hacia atrás)

Si A es **invertible**, entonces podemos construir la transformación lineal $S = A^{-1}\mathbf{x}$. S es una **inversa de T** dado que:

$$\begin{aligned} S(T(\mathbf{x})) &= S(A\mathbf{x}) = A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = \mathbf{x} \\ T(S(\mathbf{x})) &= T(A^{-1}\mathbf{x}) = A(A^{-1}\mathbf{x}) = (AA^{-1})\mathbf{x} = \mathbf{x} \end{aligned}$$

Transformaciones lineales invertibles

Teorema (...continuación)

Demostración de unicidad

Asumimos que hay dos inversas $S_1(\mathbf{x}) = B_1\mathbf{x}$ y $S_2(\mathbf{x}) = B_2\mathbf{x}$ con $B_1 \neq B_2$. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{v} = T(\mathbf{x})$ para algún $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (dado que T es invertible y, por lo tanto, sobreyectiva, estamos seguros de que existirá al menos un $\mathbf{x}$). Ahora

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{v}) &= B_1 A \mathbf{x} = \mathbf{x} = B_1 \mathbf{v} \\ S_2(\mathbf{v}) &= B_2 A \mathbf{x} = \mathbf{x} = B_2 \mathbf{v} \end{aligned} \implies B_1 \mathbf{v} = B_2 \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \implies B_1 = B_2$$

lo cual es una contradicción y, por lo tanto, existe una única inversa.

Definición: Matriz mal condicionada

Informalmente, decimos que una **matriz** A está **mal condicionada** si está “**próxima a ser singular**”. En la práctica, esto implica que el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede tener grandes variaciones en la solución ($\mathbf{x}$) cuando $\mathbf{b}$ varía ligeramente.

- Tema 3_Enunciados de ejercicios III
 - Ejercicio 2.3.13
 - Ejercicio 2.3.16
 - Ejercicio 2.3.33
 - Ejercicio 2.3.41 (** Octave, apartados a) y b) **)

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- **Matrices particionadas**
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Matrices particionadas o por bloques

Las **matrices particionadas o por bloques** algunas veces nos ayudan a comprender mejor la estructura del problema, mediante la identificación de **bloques** dentro de la matriz

Ejemplo

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{array} \right)$$

$$A \in \mathcal{M}_{3 \times 6}$$

$$A_{11} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}, \quad A_{12} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}, \quad A_{13} \in \mathcal{M}_{2 \times 1}$$

$$A_{21} \in \mathcal{M}_{1 \times 3}, \quad A_{22} \in \mathcal{M}_{1 \times 2}, \quad A_{23} \in \mathcal{M}_{1 \times 1}$$

Octave

```
A=[ 3 0 -1 5 9 -2; -5 2 4 0 -3 1; -8 -6 3 1 7 -4]
A11=A(1:2, 1:3); A12= A(1:2, 4:5); A13=A(1:2, 6)
A21=A(3, 1:3); A22= A(3, 4:5); A33=A(3, 6)
```

Matrices particionadas o por bloques

Definición: Suma de matrices particionadas

Sean A y B dos matrices particionadas de la misma forma. Entonces los bloques de $A + B$ son simplemente la suma de sus correspondientes bloques

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & A_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & B_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & A_{ij} + B_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right)$$

Definición: Multiplicación por un escalar

La multiplicación por un escalar simplemente multiplica cada uno de los bloques independientemente

$$rA = r \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & A_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} \hline & & \\ \hline & rA_{ij} & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \right)$$

Matrices particionadas o por bloques

Definición: Multiplicación de matrices particionadas

Multiplicar los diferentes bloques como si fuesen escalares (pero aplicando la multiplicación de matrices)

Ejemplo

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B = \left[\begin{array}{c|c} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ \hline -3 & 7 \\ -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrices particionadas o por bloques

Teorema: Multiplicación de matrices

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$, entonces:

$$AB = \sum_{k=1}^n \text{column}_k(A) \text{row}_k(B)$$

Demostración

Analicemos cada uno de los términos de la suma

$$\begin{aligned} \text{column}_k(A) \text{row}_k(B) &= \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix} (b_{k1} \quad b_{k2} \quad \dots \quad b_{kp}) = \\ &= \begin{pmatrix} a_{1k}b_{k1} & a_{1k}b_{k2} & \dots & a_{1k}b_{kp} \\ a_{2k}b_{k1} & a_{2k}b_{k2} & \dots & a_{2k}b_{kp} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{mk}b_{k1} & a_{mk}b_{k2} & \dots & a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrices particionadas o por bloques

Teorema: Multiplicación de matrices

Demostración (...continuación)

En general, el elemento ij es:

$$(\text{column}_k(A)\text{row}_k(B))_{ij} = a_{ik}b_{kj}$$

Si analizamos el elemento ij de la suma

$$\left(\sum_{k=1}^n \text{column}_k(A)\text{row}_k(B) \right)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\text{column}_k(A)\text{row}_k(B))_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Pero esta es la definición de la multiplicación de matrices y, por lo tanto,

$$\left(\sum_{k=1}^n \text{column}_k(A)\text{row}_k(B) \right)_{ij} = (AB)_{ij}$$

Matrices particionadas o por bloques

Definición: Traspuesta de matrices particionadas

Para calcular la traspuesta de una matriz particionada, se transpone cada bloque como si fuesen escalares, y luego se transpone cada uno de los bloques

Ejemplo

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ \hline A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ \hline A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \right) \Rightarrow A^T = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}^T & A_{21}^T & A_{31}^T \\ \hline A_{12}^T & A_{22}^T & A_{32}^T \\ \hline A_{13}^T & A_{23}^T & A_{33}^T \end{array} \right)$$

Ejemplo

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow A^T = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & -4 \\ \hline 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 7 \\ \hline -4 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Matrices particionadas o por bloques

Definición: Inversa de una matriz particionada

La fórmula para cada caso depende de cada caso. A continuación se muestran algunos ejemplos con casos típicos

Ejemplo

$$\text{Sea } A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{33} \end{array} \right).$$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $A_{11} \in \mathcal{M}_{p \times p}$, $A_{22} \in \mathcal{M}_{q \times q}$, $A_{33} \in \mathcal{M}_{r \times r}$ tal que $p + q + r = n$.

Buscamos una matriz B tal que

$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22} & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{33} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ \hline B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_r \end{array} \right) \Rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{11}B_{13} \\ \hline A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} & A_{22}B_{23} \\ \hline A_{33}B_{31} & A_{33}B_{32} & A_{33}B_{33} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_q & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_r \end{array} \right)$$

Matrices particionadas o por bloques

Ejemplo (...continuación)

Para cada una de las entradas, tenemos un conjunto de ecuaciones:

$$\forall A_{11} \in \mathcal{M}_{p \times p} \quad A_{11}B_{11} = I_p \Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1}$$

$$\forall A_{11} \in \mathcal{M}_{p \times p} \quad A_{11}B_{12} = 0 \Rightarrow B_{12} = 0$$

$$\forall A_{11} \in \mathcal{M}_{p \times p} \quad A_{11}B_{13} = 0 \Rightarrow B_{13} = 0$$

$$\forall A_{22} \in \mathcal{M}_{q \times q} \quad A_{22}B_{21} = 0 \Rightarrow B_{21} = 0$$

$$\forall A_{22} \in \mathcal{M}_{q \times q} \quad A_{22}B_{22} = I_q \Rightarrow B_{22} = A_{22}^{-1}$$

$$\forall A_{22} \in \mathcal{M}_{q \times q} \quad A_{22}B_{23} = 0 \Rightarrow B_{23} = 0$$

$$\forall A_{33} \in \mathcal{M}_{r \times r} \quad A_{33}B_{31} = 0 \Rightarrow B_{31} = 0$$

$$\forall A_{33} \in \mathcal{M}_{r \times r} \quad A_{33}B_{32} = 0 \Rightarrow B_{32} = 0$$

$$\forall A_{33} \in \mathcal{M}_{r \times r} \quad A_{33}B_{33} = I_r \Rightarrow B_{33} = A_{33}^{-1}$$

Finalmente,

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{11}^{-1} & 0 & 0 \\ \hline 0 & A_{22}^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & A_{33}^{-1} \end{array} \right)$$

Matrices particionadas o por bloques

Ejemplo

Sea $A = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right).$

$A \in \mathcal{M}_{n \times n}$, $A_{11} \in \mathcal{M}_{p \times p}$, $A_{12} \in \mathcal{M}_{p \times q}$, $A_{22} \in \mathcal{M}_{q \times q}$ tal que $p + q = n$.

Buscamos una matriz B , tal que

$$\begin{aligned} &= \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\left(\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & I_q \end{array} \right) \end{aligned}$$

Matrices particionadas o por bloques

Ejemplo (...continuación)

Para cada una de las entradas, tenemos un conjunto de ecuaciones:

$$\forall A_{22} \in \mathcal{M}_{q \times q} \quad A_{22}B_{21} = 0 \Rightarrow B_{21} = 0$$

$$\forall A_{22} \in \mathcal{M}_{q \times q} \quad A_{22}B_{22} = I_q \Rightarrow B_{22} = A_{22}^{-1}$$

$$\forall A_{11} \in \mathcal{M}_{q \times q}, A_{12} \in \mathcal{M}_{p \times q} \quad A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p \Rightarrow [B_{21} = 0] \Rightarrow \\ A_{11}B_{11} = I_p \Rightarrow B_{11} = A_{11}^{-1}$$

$$\forall A_{11} \in \mathcal{M}_{q \times q}, A_{12} \in \mathcal{M}_{p \times q} \quad A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \Rightarrow [B_{22} = A_{22}^{-1}] \Rightarrow \\ A_{11}B_{12} + A_{12}A_{22}^{-1} = 0 \Rightarrow A_{11}B_{12} = -A_{12}A_{22}^{-1} \Rightarrow \\ B_{12} = -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}$$

Finalmente,

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ \hline 0 & A_{22}^{-1} \end{array} \right)$$

- Tema 3_Enunciados de ejercicios IV
 - Ejercicio 2.4.1
 - Ejercicio 2.4.2
 - Ejercicio 2.4.3
 - Ejercicio 2.4.4

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- **Factorización LU**
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Factorización LU

Ejemplo

Supongamos que tenemos una colección de sistemas de ecuaciones de la forma:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$$

...

y **A no invertible**. ¿Existe alguna forma eficiente de resolver todos los sistemas a la vez?

La solución es **factorizar A** como **$A = LU$** (ver a continuación) y resolver el sistema de ecuaciones en 2 pasos. De hecho, este método es tan eficiente que incluso se usa para resolver sistemas simples de ecuaciones

Factorización LU

Definición: Factorización LU

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ que puede ser reducida a su **forma escalonada reducida sin realizar permutaciones de filas**. Podemos factorizar A como $A = LU$, donde L es una **matriz triangular inferior invertible** (con 1's en la diagonal principal) de tamaño $m \times m$, y U es una **matriz triangular superior** de tamaño $m \times n$

Octave

$$[L, U] = lu(A)$$

Ejemplo

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{4 \times 5}$. La factorización LU producirá dos matrices L y U con la siguiente estructura:

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

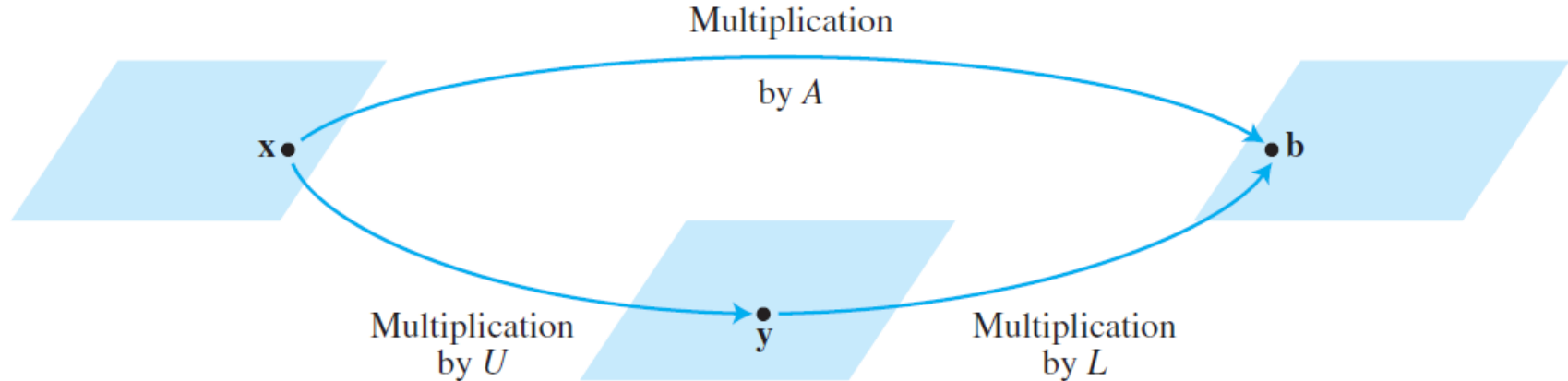
L U

Factorización LU

Resolver sistemas de ecuaciones lineales usando la descomposición LU

Consideremos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y asumimos que tenemos A descompuesto como $A = LU$. Entonces podemos resolver el sistema de ecuaciones en dos pasos:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow (LU)\mathbf{x} = L(U\mathbf{x}) = \mathbf{b} \Rightarrow \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$



Factorización LU

Ejemplo

Consideremos la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = LU$$

y $\mathbf{b} = (-9, 5, 7, 11)$. Primero resolvemos $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} L & \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

y después resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{bmatrix} U & \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

El truco está en que, gracias a la estructura triangular, resolver estos dos sistemas de ecuaciones es bastante rápido.

Factorización LU

Algoritmo de factorización LU

Asumimos que A es equivalente por filas a U usando sólo sustitución de filas con las filas por encima de la fila reemplazada. Entonces, existirá una secuencia de matrices elementales tal que:

$$A \sim U \Rightarrow E_p \dots E_2 E_1 A = U \Rightarrow A = (E_p \dots E_2 E_1)^{-1} U$$

Por inspección, vemos que $L = (E_p \dots E_2 E_1)^{-1}$

En el algoritmo anterior se hace uso del siguiente teorema:

Teorema

1. El **producto** de 2 matrices triangulares inferiores es triangular inferior
2. La **inversa** de una matriz triangular inferior es triangular inferior

Factorización LU

Ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 &\leftarrow \mathbf{r}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 & E_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &\leftarrow \mathbf{r}_3 - \frac{2}{3}\mathbf{r}_2 & E_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ U &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora, calculamos L como:

$$L = (E_2 E_1)^{-1} = E_1^{-1} E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Ejemplo

Podemos ver que las matrices L y U son **asimétricas**, en el sentido que L tiene 1's en su diagonal principal, pero U no. Podemos extraer **los elementos de la diagonal de U** a otra **matriz D** simplemente dividiendo la correspondiente fila de U por ese elemento:

$$\begin{aligned} A &= LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= LDU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde D es siempre una matriz diagonal

Factorización LU

Otras factorizaciones

Hay muchas otras posibles maneras de factorizar una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Se pueden ver ejemplos en: https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_decomposition . Entre los más importantes están:

QR: $A = QR$ donde $Q \in \mathcal{M}_{m \times m}$ es ortogonal ($Q^t Q = I_m$) y $R \in \mathcal{M}_{m \times n}$ es triangular superior

SVD: $A = UDV^t$ donde $U \in \mathcal{M}_{m \times m}$ es unitaria ($U^t U = I_m$), $D \in \mathcal{M}_{m \times n}$ es diagonal, y
 $V \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es también unitaria ($V^t V = I_n$)

Spectral: $A = PDP^{-1}$ (sólo para matrices cuadradas) donde $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$ y
 $D \in \mathcal{M}_{n \times n}$ es diagonal

- Tema 3_Enunciados de ejercicios V
 - Ejercicio 2.5.9
 - Ejercicio 2.5.Practice problem

Índice de contenidos

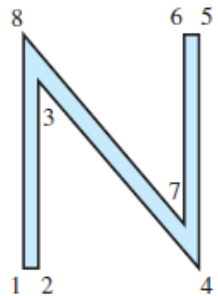
- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes

Ejemplo

En **gráficos vectoriales**, los gráficos se describen como un conjunto de puntos conectados, cuyas coordenadas son conocidas.

Por ejemplo, la letra **N mayúscula** está determinada por 8 puntos o vértices. Las coordenadas de estos puntos pueden ser almacenadas en una **matriz D**.

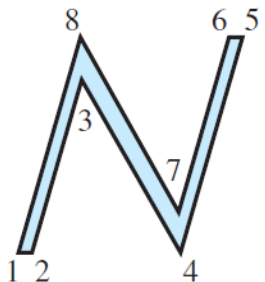


Vertex:

$$\begin{array}{l} x\text{-coordinate} \\ y\text{-coordinate} \end{array} \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & .5 & .5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{array} \right] = D \end{array}$$

Podemos generar la “cursiva” aplicando una deformación sobre las coordenadas originales de la

forma $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



$$AD = \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & .5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2 \\ 0 & 0 & 6.420 & 0 & 8 & 8 & 1.580 & 8 \end{array} \right] \end{array}$$

Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes

Ejemplo (...continuación)

Ahora, si queremos **reducir (escalar)** todas las **coordenadas x** de un punto por **0,75** después de aplicar la deformación, podemos **componer las transformaciones**.

La matriz que escala las coordenadas x por 0,75 sería la siguiente:

$$S = \begin{bmatrix} .75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de la transformación compuesta sería:



$$SA = \begin{bmatrix} .75 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & .25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .75 & .1875 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes

Ejemplo

La traslación de coordenadas puede ser expresada como $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$. Pero esto no es una transformación lineal:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u}) &= \mathbf{u} + \mathbf{x}_0 \\T(\mathbf{v}) &= \mathbf{v} + \mathbf{x}_0 \\T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{x}_0 \\T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{x}_0) + (\mathbf{v} + \mathbf{x}_0) = \mathbf{u} + \mathbf{v} + 2\mathbf{x}_0 \\T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &\neq T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})\end{aligned}$$

Podemos solucionar este problema con **coordenadas homogéneas**

Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes

Definición: Coordenadas homogéneas

Dado un punto con coordenadas $\mathbf{x}$, podemos construir sus **coordenadas homogéneas** como:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} h\mathbf{x} \\ h \end{pmatrix}$$

O, en otras palabras, dadas las coordenadas homogéneas $\tilde{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ h \end{pmatrix}$, estas representan el punto en $\frac{\mathbf{u}}{h}$. Se acostumbra a utilizar $h = 1$ (pero no es obligatorio, y en ciertas aplicaciones es mejor usar otros h 's)

Ejemplo

El **punto (1,2)** en 2D puede ser representado en **coordenadas homogéneas** como **(1, 2, 1)**, como **(2, 4, 2)**, e incluso como **(-2, -4, -2)**. Todos ellos representan el mismo punto.

Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes

Ejemplo

Ahora, la traslación de coordenadas con coordenadas homogéneas es una transformación lineal. Por ejemplo, en 2D:

$$T(\tilde{\mathbf{x}}) = A\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y + \Delta y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformaciones en 2D con coordenadas homogéneas

En general, cualquier transformación en 2D de la forma $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ puede ser representada en coordenadas homogéneas como

$$T(\tilde{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

Transformaciones en 2D con coordenadas homogéneas (...continuación)

Ejemplos típicos son:

$$\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Rotación antihoraria alrededor
del origen, con ángulo φ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Reflexión $y = x$

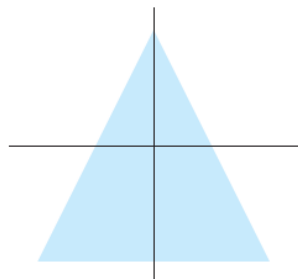
$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escalado de x por s ,
e y por t

Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes

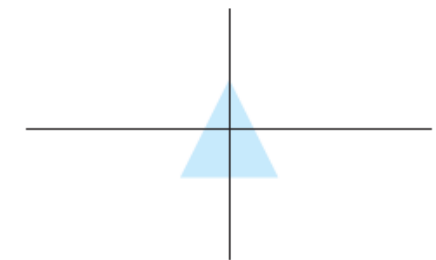
Composición de transformaciones

Usando las matrices de la transparencia anterior, hallar la matriz de la transformación compuesta que **escala por un factor 0.3**, **rota 90°** sobre el origen y finalmente realiza una **traslación** añadiendo **(-0.5, 2)** a cada punto.



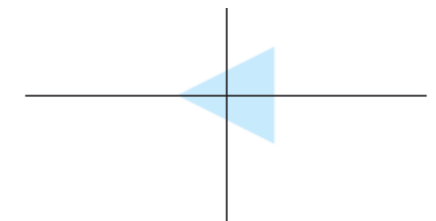
Original Figure

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Scale}} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



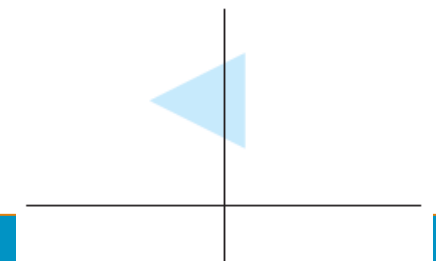
After Scaling

$$\begin{bmatrix} 0 & -.3 & -.5 \\ .3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Rotate}} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



After Rotating

$$\xrightarrow{\text{Translate}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -.5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3 & 0 & 0 \\ 0 & .3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



After Translating



Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes

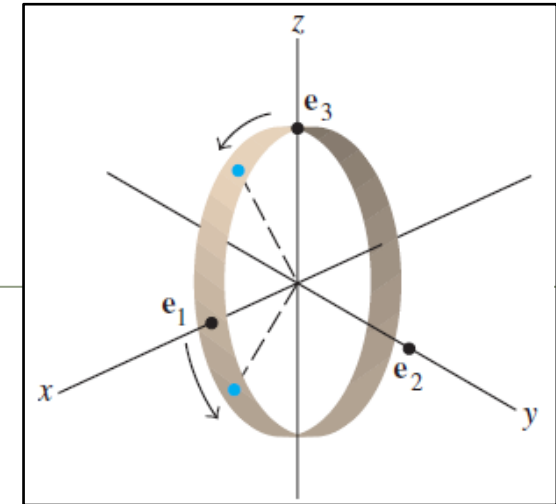
Transformaciones en 3D con coordenadas homogéneas

Supongamos que queremos

1. Rotar un punto 30° alrededor del eje Y
2. Después, trasladarlo por $(-6, 4, 5)$

Necesitamos usar la transformación $T(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}$ con

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(30^\circ) & 0 & \sin(30^\circ) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(30^\circ) & 0 & \cos(30^\circ) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$



Ejemplo

Una aplicación con gráficos en 3D: <https://www.youtube.com/watch?v=EsNmiiKIRXQ>

- Tema 3_Enunciados de ejercicios VI
 - Ejercicio 2.7.2
 - Ejercicio 2.7.3
 - Ejercicio 2.7.10
 - Ejercicio 2.7.22 (** Octave **)

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- Dimensión y rango

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Definición: Subespacio de $\mathbb{R}^n$

$H \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ si:

1. $\mathbf{0} \in H$
2. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H \rightarrow H$ está cerrado bajo la suma de vectores
3. $\forall \mathbf{u} \in H, \forall r \in \mathbb{R}, r\mathbf{u} \in H \rightarrow H$ está cerrado bajo la multiplicación por un escalar

Ejemplo: subespacios especiales

Los siguientes 2 conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^n$:

1. $H = \{\mathbf{0}\}$
2. $H = \mathbb{R}^n$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo: Plano

Un **plano** está definido como: $H = \text{Span} \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2\}$

Este **plano** es un **subespacio de $\mathbb{R}^3$**

Demostración

1. Demostrar $\mathbf{0} \in H \rightarrow$ Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

2. Demostrar $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H \rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \in H &\Rightarrow \mathbf{u} = \lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v} \in H &\Rightarrow \mathbf{v} = \lambda_{1v} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2v} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (\lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2) + (\lambda_{1v} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2v} \mathbf{v}_2) \\ &= (\lambda_{1u} + \lambda_{1v}) \mathbf{v}_1 + (\lambda_{2u} + \lambda_{2v}) \mathbf{v}_2 \in H\end{aligned}$$

3. Demostrar $r\mathbf{u} \in H \rightarrow$

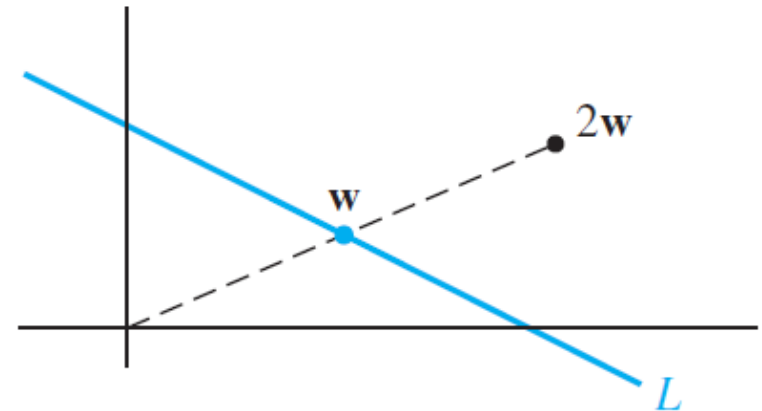
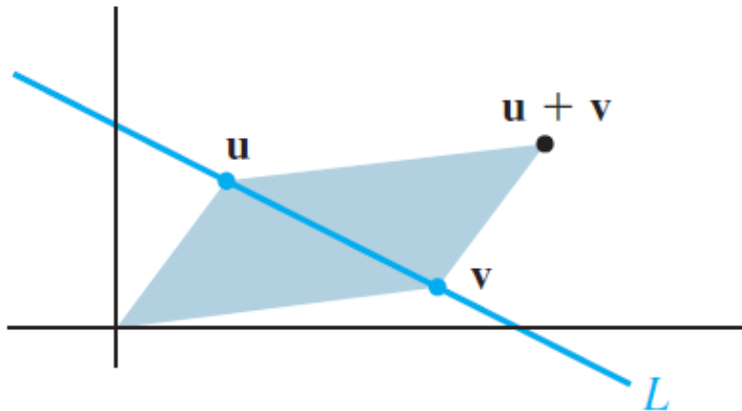
$$\begin{aligned}\mathbf{u} \in H &\Rightarrow \mathbf{u} = \lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2 \\ r\mathbf{u} &= r(\lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + \lambda_{2u} \mathbf{v}_2) \\ &= r\lambda_{1u} \mathbf{v}_1 + r\lambda_{2u} \mathbf{v}_2 \in H\end{aligned}$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo: Recta que no pasa por el origen

Una recta (L) que no pasa por el origen, no es un subespacio, porque

1. $\mathbf{0} \notin L$
2. Si tomamos 2 puntos de la recta ($\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$), $\mathbf{u} + \mathbf{v} \notin L$
3. Si tomamos un punto de la recta ($\mathbf{w}$), $2\mathbf{w} \notin L$



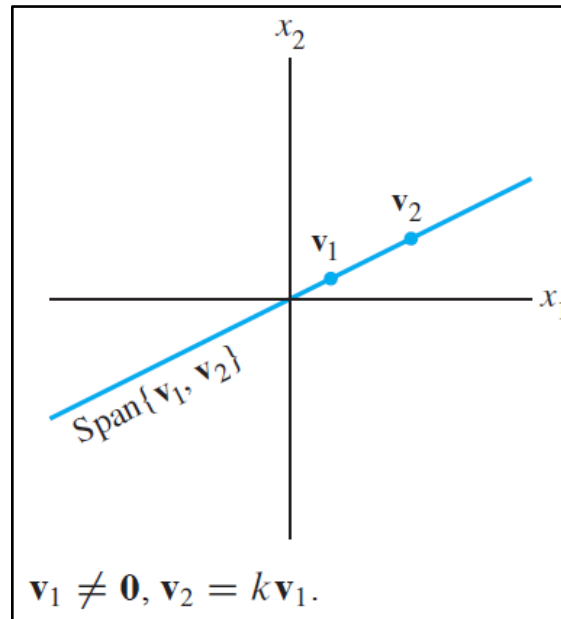
Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo: Recta que pasa por el origen

Consideremos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$. Entonces,

$$H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$$

es una recta. Es fácil de probar que esta recta es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.



Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Definición: Espacio columna de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. Sean $a_i \in \mathbb{R}^m$ las columnas de la matriz A . El **espacio columna** de A se define como:

$$\text{Col}\{A\} = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

Teorema

$\text{Col}\{A\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Determinar si $\mathbf{b}$ pertenece al $\text{Col}\{A\}$.

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$. Determinar si $\mathbf{b}$ pertenece al $\text{Col}\{A\}$.

Solución:

Si $\mathbf{b} \in \text{Col}\{A\}$ deberán existir unos coeficientes x_1 , x_2 y x_3 tales que:

$$\mathbf{b} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + x_3 \mathbf{a}_3$$

Para encontrar esos coeficientes, resolvemos el sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

De hecho, hay infinitas soluciones al sistema de ecuaciones y, por lo tanto, $\mathbf{b} \in \text{Col}\{A\}$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Definición: Espacio nulo de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$. El **espacio nulo** de A se define como:

$$\text{Nul}\{A\} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

Teorema

$\text{Nul}\{A\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$

1. Demostrar $\mathbf{0} \in \text{Nul}\{A\} \rightarrow A\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{0} \in \text{Nul}\{A\}$

2. Demostrar $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H \rightarrow \mathbf{u} \in \text{Nul}\{A\} \Rightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{0}$
 $\mathbf{v} \in \text{Nul}\{A\} \Rightarrow A\mathbf{v} = \mathbf{0}$
 $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} + \mathbf{v} \in \text{Nul}\{A\}$

3. Demostrar $r\mathbf{u} \in H \rightarrow \mathbf{u} \in \text{Nul}\{A\} \Rightarrow A\mathbf{u} = \mathbf{0}$
 $A(r\mathbf{u}) = rA\mathbf{u} = r\mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow r\mathbf{u} \in \text{Nul}\{A\}$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Definición: Base de un subespacio

Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$. El conjunto de vectores B es una **base de H** si:

1. Todos los **vectores en B** son **linealmente independientes**
2. **$H = \text{Span}\{B\}$**

Base estándar de $\mathbb{R}^n$

Sean los vectores:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

El conjunto $B = \{ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \}$ es la **base estándar** de $\mathbb{R}^n$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio nulo** de $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio nulo** de $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Solución

El **espacio nulo de A** son todos aquellos **vectores** que satisfacen **$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$** .

$$[A \quad \mathbf{0}] \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Por lo que, la solución general es (en forma vectorial paramétrica):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + x_4 - 3x_5 \\ x_2 \\ -2x_4 + 2x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_2 \mathbf{u} + x_4 \mathbf{v} + x_5 \mathbf{w}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\mathbf{u} \quad \quad \mathbf{v} \quad \quad \mathbf{w}$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo (...continuación)

El conjunto $B = \{ \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \} = \{ (2,1,0,0,0), (1,0,-2,1,0), (-3,0,2,0,1) \}$ es una base de $\text{Nul}\{A\}$. Por construcción, estos vectores son linealmente independientes.

Ejemplo: Espacio Nulo y sistemas de ecuaciones

Consideremos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $\{\mathbf{e}_3\}$ es una base del $\text{Nul}\{A\}$
- Consideremos $\mathbf{b} = (7, 3, 0)$. La solución general de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es de la forma:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_{\text{Nul}}$$

donde $\mathbf{x}_0$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ que no pertenece al $\text{Nul}\{A\}$ y $\mathbf{x}_{\text{nul}}$ pertenece al $\text{Nul}\{A\}$. Para este caso particular,

$$\mathbf{x} = (7, 3, 0) + x_3 \mathbf{e}_3$$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio columna** de $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Solución

De las columnas que **no tienen pivote** de la matriz **B**, sabemos que:

$$\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_4 = 5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2$$

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } \text{Col}\{B\} &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4 + x_5\mathbf{b}_5 \} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{l} \mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3(-3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2) + \\ \quad x_4(5\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) + x_5\mathbf{b}_5 \end{array} \right\} \\ &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^4 \mid \mathbf{v} = x'_1\mathbf{b}_1 + x'_2\mathbf{b}_2 + x_5\mathbf{b}_5 \} \end{aligned}$$

Y, por lo tanto: **Basis** $\{\text{Col}\{B\}\} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_5\}$

Subespacios de $\mathbb{R}^n$

Ejemplo

Encontrar una **base** para el **espacio columna** de $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{bmatrix}$

Solución

Resulta que $A \sim B$ (B del ejemplo anterior). Dado que las operaciones por filas no afectan la relaciones de independencia lineal entre las columnas de la matriz, deberíamos tener que:

$$\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$$

$$\mathbf{a}_4 = 5\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

Y, por lo tanto, **Basis** $\{\text{Col}\{A\}\} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$

Teorema

Las **columnas pivote** de A forman una **base** de $\text{Col}\{A\}$

- Tema 3_Enunciados de ejercicios VII
 - Ejercicio 2.8.1
 - Ejercicio 2.8.2
 - Ejercicio 2.8.5

Índice de contenidos

- Operaciones matriciales
- Inversa de una matriz
- Matrices elementales
- Un algoritmo para invertir matrices
- Caracterización de las matrices invertibles
- Transformaciones lineales invertibles
- Matrices particionadas
- Factorización LU
- Una aplicación para gráficos por ordenador y procesamiento de imágenes
- Subespacios de $\mathbb{R}^n$
- **Dimensión y rango**

Sistema de coordenadas

Definición: Coordenadas de un vector en la base B

Supongamos que $B = \{ \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p \}$ es una base para el subespacio $H \subseteq \mathbb{R}^n$.

Para cada $\mathbf{x} \in H$, las coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a la base B son los pesos c_i tales que:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \dots + c_p \mathbf{b}_p$$

Las **coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a la base B** es el **vector** en $\mathbb{R}^p$

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_p \end{pmatrix}$$

Sistema de coordenadas

Ejemplo

Sean $\mathbf{x} = (3, 12, 7)$, $\mathbf{v}_1 = (3, 6, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

1. Demostrar que B es un conjunto linealmente independiente
2. Encontrar las coordenadas de $\mathbf{x}$ en el sistema de coordenadas B

Sistema de coordenadas

Ejemplo

Sean $\mathbf{x} = (3, 12, 7)$, $\mathbf{v}_1 = (3, 6, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

1. Demostrar que B es un conjunto linealmente independiente
2. Encontrar las coordenadas de $\mathbf{x}$ en el sistema de coordenadas B

Solución

1. Necesitamos probar que la única solución del sistema de ecuaciones

$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ es $c_1 = c_2 = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema de coordenadas

Ejemplo

Sean $\mathbf{x} = (3, 12, 7)$, $\mathbf{v}_1 = (3, 6, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

1. Demostrar que B es un conjunto linealmente independiente
2. Encontrar las coordenadas de $\mathbf{x}$ en el sistema de coordenadas B

Solución

1. Necesitamos probar que la única solución del sistema de ecuaciones

$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ es $c_1 = c_2 = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2. Necesitamos encontrar c_1 y c_2 tales que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{x}$

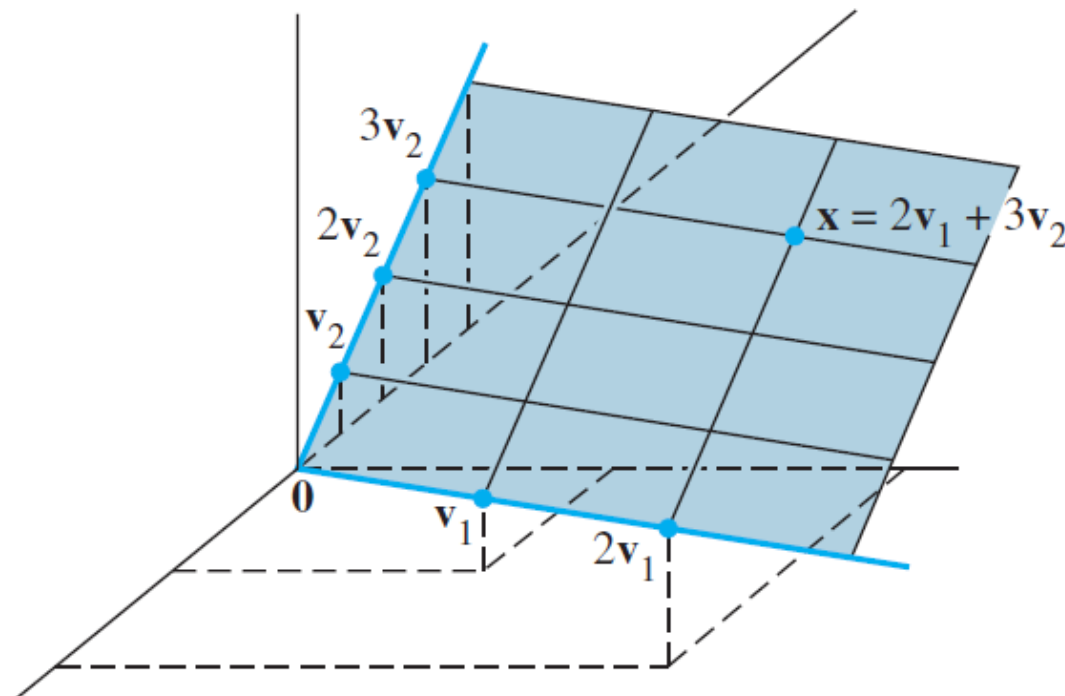
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por lo tanto, $[\mathbf{x}]_B = (2, 3)$.

Sistema de coordenadas

Ejemplo (...continuación)

La siguiente figura muestra cómo $\mathbf{x}$ es igual a $2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$



Sistema de coordenadas

Teorema

Las coordenadas de un **vector** dado con respecto a una **base** dada son **únicas**

Demostración

Asumimos que no son únicas. Entonces, debe haber dos conjuntos diferentes de coordenadas tales que:

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + c_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + c_p \mathbf{b}_p$$

$$\mathbf{x} = c'_1 \mathbf{b}_1 + c'_2 \mathbf{b}_2 + \cdots + c'_p \mathbf{b}_p$$

Si restamos ambas ecuaciones, tenemos:

$$\mathbf{0} = (c_1 - c'_1) \mathbf{b}_1 + (c_2 - c'_2) \mathbf{b}_2 + \cdots + (c_p - c'_p) \mathbf{b}_p$$

Pero dado que la base es un conjunto de vectores linealmente independientes, debe ser:

$$(c_1 - c'_1) = 0 \Rightarrow c_1 = c'_1 ; (c_2 - c'_2) = 0 \Rightarrow c_2 = c'_2 ; \dots ; (c_p - c'_p) = 0 \Rightarrow c_p = c'_p$$

Esto es una contradicción con la hipótesis de que hubiera 2 conjuntos diferentes de coordenadas y, por lo tanto, las coordenadas de un vector **x** deben ser únicas

Dimensión de un subespacio

Isomorfismo de $\mathbb{R}^p$

Para cualquier **subespacio** H y su correspondiente **base** B , el *mapping*

$$\begin{aligned} T : H &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ \mathbf{x} &\rightarrow [\mathbf{x}]_B \end{aligned}$$

es una **transformación lineal inyectiva**, que hace comportarse a H como $\mathbb{R}^p$

Definición: Dimensión

La **dimensión de un subespacio** H ($\dim\{H\}$) es el número de vectores de cualquiera de sus bases.

La dimensión de $H = \{ \mathbf{0} \}$ es 0.

Ejemplo (...continuación)

En el ejemplo anterior en el cual $B = \{ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \}$, la **dimensión es 2**. De hecho, H se comporta como un plano (ver figura previa en el ejemplo)

Rango de una matriz

Definición: Rango de una matriz

El **rango de una matriz** A es $\text{rank}\{A\} = \dim\{\text{Col}\{A\}\}$, esto es, la dimensión del espacio columna de la matriz

Octave

$\text{rank}(A)$

Teorema

El **rango** de una matriz es el **número de columnas pivote** que tiene

Demostración

Dado que las columnas pivote forman una base del espacio columna de A , el número de columnas pivote es el rango de la matriz

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 & -9 \\ -2 & -2 & 2 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 11 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Por lo tanto, el rango de } A \text{ es } 3.$$

Rango de una matriz

Teorema del Rango

Si A tiene n columnas, entonces $\text{Rank}\{A\} + \dim\{\text{Nul}\{A\}\} = n$

Teorema de la Base

Sea H un subespacio de dimensión p . Cualquier conjunto linealmente independiente de p vectores de H es una base de H . Cualquier conjunto de p vectores que genere H es una base de H .

Caracterización de las matrices invertibles

Teorema de la Matriz Invertible (...extensión)

Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes (o todas son ciertas o todas falsas):

- xiii. Las columnas de A forman una base de $\mathbb{R}^n$
- xiv. $\text{Col}\{A\} = \mathbb{R}^n$
- xv. $\dim\{\text{Col}\{A\}\} = n$
- xvi. $\text{Rank}\{A\} = n$
- xvii. $\text{Nul}\{A\} = \{\mathbf{0}\}$
- xviii. $\dim\{\text{Nul}\{A\}\} = 0$

- Tema 3_Enunciados de ejercicios VIII
 - Ejercicio 2.9.1
 - Ejercicio 2.9.3
 - Ejercicio 2.9.9
 - Ejercicio 2.9.19
 - Ejercicio 2.9.27